

## *Solución numérica del modelo Black-Scholes no local por molificación discreta*

CARLOS D. ACOSTA\*, FERNÁN C. OSORIO

Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemática y Estadística,  
Manizales, Colombia.

**Resumen.** El objetivo de este artículo es estudiar una aproximación numérica de una ecuación de Black-Scholes no local, haciendo uso de técnicas de molificación discreta y diferencias finitas. Analizamos la estabilidad del esquema numérico propuesto mediante monotonía, y discutimos ejemplos numéricos que ilustran las bondades del método.

**Palabras clave:** Modelo Black-Scholes, diferencias finitas, molificación discreta.

**MSC2010:** 65M06, 65M12, 35R09.

## *Numerical solution of the non-local Black-Scholes model by means of discrete mollification*

**Abstract.** The objective of this paper is to study a numerical approximation of a non-local Black-Scholes equation, by means of techniques of discrete mollification and finite differences. We analyze stability of the proposed numerical scheme through monotony and show examples that illustrate its capabilities.

**Keywords:** Black-Scholes, finite differences, discrete mollification.

### **1. Introducción**

En el estudio de problemas financieros han surgido varias ecuaciones integro-diferenciales, entre ellas la ecuación de difusión de Black-Scholes no local [7],

$$\begin{cases} u_t(x, t) = bu_{xx}(x, t) + cu_x(x, t) - ru(x, t) + d \int_{\mathbb{R}} k(x-s)u(s, t)ds - du(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

---

\*E-mail: cdacostam@unal.edu.co

Recibido: 14 de mayo de 2015, Aceptado: 16 de octubre 2015.

Para citar este artículo: C.D. Acosta, F.C. Osorio, Solución numérica del modelo Black-Scholes no local por molificación discreta, *Rev. Integr. Temas Mat.* 33 (2015), No. 2, 145–160.

para  $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ , y constantes  $b, d, r \geq 0$  con  $(b, d) \neq (0, 0)$ , y  $c \in \mathbb{R}$ . En esta ecuación la función  $u(x, t)$  representa la opción de precio o crédito contingente como una función del tiempo y del precio de mercado; los valores  $b$  y  $d$  corresponden a volatilidad e intensidad; en ese orden,  $r$  es la tasa de interés libre y  $c$  la desviación de tasa. En general, el efecto de los vecinos cercanos  $x$  y  $s$  sobre  $u$  se describe por medio de una función simétrica con respecto al eje  $Y$ ,  $k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , que además decae suavemente en  $[0, \infty)$ , y es tal que  $\int_{\mathbb{R}} k(z) = 1$ . Una función  $k$  que cumple las condiciones anteriores se denomina núcleo.

Ecuaciones del tipo (1) ya han sido estudiadas por diversos autores. En [5] se realizan análisis de existencia y unicidad de soluciones, mientras que en [7] se aplica un proceso de discretización que implementa el método *multigrid*, permitiendo obtener un esquema numérico explícito y uno implícito. Notamos que en [7] encuentran la solución exacta a la ecuación de interés haciendo uso de la transformada de Fourier, asumiendo que una solución  $u$  es  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . En [6],[9] y [8] se han propuesto varias aproximaciones numéricas a soluciones cuando las constantes  $b, c$  y  $r$  son cero, haciendo uso de los métodos de diferencias finitas y elementos finitos.

En este artículo suponemos que la condición inicial  $u_0$  se encuentra en  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , que una solución  $u$  también está en  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  y es lipschitziana con respecto a la primera variable en casi todas partes. Nos limitamos a núcleos  $k$  estrictamente positivos en un intervalo  $(-p, p)$  para algún  $p \in (0, \infty)$ , y cero fuera.

Con el fin de proponer nuestro esquema numérico, haremos uso de las técnicas de modificación discreta expuestas en [3] para aproximar la integral impropia al lado derecho de (1), y diferencias finitas centradas, como se hace en [7], para discretizar las derivadas parciales de la función  $u$ . Después, imponemos condiciones sobre las constantes  $b, c, d$  y  $r$  que aseguran que se satisfagan propiedades de estabilidad y monotonía importantes para la convergencia del esquema numérico propuesto, y luego, en la sección de experimentos numéricos, usamos la expresión de la solución exacta encontrada en [7] para efectos de determinar errores y orden de convergencia de la aproximación. A pesar de que las condiciones impuestas para lograr estabilidad y monotonía del esquema numérico son necesarias pero no suficientes, logramos buenas aproximaciones.

## 2. Aproximación numérica

En esta sección desarrollamos el esquema numérico aproximante a la solución de (1), usando un tamaño de malla en  $x$  de  $\Delta x > 0$  y en  $t$  de  $\Delta t > 0$ . Definiremos la aproximación sobre los puntos de forma  $(x_j, t^n)$ , con  $x_j := j\Delta x$  para  $j \in \mathbb{Z}$  y  $t^n := n\Delta t$  para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Denotaremos por  $\mathbb{N}_0$  el conjunto de los números naturales junto con el cero.

Para el análisis subsecuente asumimos que una solución  $u$  al problema objeto de estudio se encuentra en  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  y es lipschitziana con respecto a la primera variable en casi todas partes; denotamos la constante de Lipschitz como  $L$ , de modo que

$$|u(x_1, t) - u(x_2, t)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

Además, suponemos que la función  $k$  es un núcleo que es estrictamente positivo en un intervalo abierto  $(-p, p)$ , para algún  $p \in (0, \infty)$ , y cero fuera de él.

Respecto al dato inicial  $u_0$ , asumimos que se encuentra en  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , y planteamos su

discretización como en [4], definiendo

$$v_j^0 := \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u_0(x) dx, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

con  $I_j = [x_j - \frac{1}{2}\Delta x, x_j + \frac{1}{2}\Delta x]$  el intervalo cerrado centrado en  $x_j$  y de longitud  $\Delta x$ . Notamos que de (2),  $u_0$  es además lipschitziana en casi todas partes.

Si  $u$  es una solución a (1), entonces

$$\begin{aligned} u_t(x_j, t^n) &= bu_{xx}(x_j, t^n) + cu_x(x_j, t^n) - ru(x_j, t^n) + \\ &+ d \int_{\mathbb{R}} k(x_j - s)u(s, t^n) ds - du(x_j, t^n), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Procedamos a aproximar numéricamente cada término en (4).

Haciendo  $\xi = s - x_j$ , y en virtud de las propiedades del núcleo  $k$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} k(x_j - s)u(s, t^n) ds &= \int_{\mathbb{R}} k(s - x_j)u(s, t^n) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} k(-\xi)u(x_j + \xi, t^n) d\xi \\ &= \int_{-p}^p k(-\xi)u(x_j + \xi, t^n) d\xi, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

de modo que para  $\eta \in \mathbb{N}$ , la constante tal que  $p \in I_\eta$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} k(x_j - s)u(s, t^n) ds = \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \int_{I_\nu} k(-\xi)u(x_j + \xi, t^n) d\xi, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0. \quad (5)$$

Ahora, de (2) y en virtud de las propiedades de  $k$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_\nu} k(\xi)[u(x_j + \xi, t^n) - u(x_{j+\nu}, t^n)] d\xi \right| &\leq \int_{I_\nu} k(\xi) |u(x_j + \xi, t^n) - u(x_{j+\nu}, t^n)| d\xi \\ &\leq L \int_{I_\nu} |x_j + \xi - x_{j+\nu}| k(\xi) d\xi \\ &= L \int_{I_\nu} |\xi - x_\nu| k(\xi) d\xi \\ &\leq L \frac{\Delta x}{2} \int_{I_\nu} k(\xi) d\xi \\ &\leq L \frac{\Delta x}{2} \int_{\mathbb{R}} k(\xi) d\xi \\ &= L \frac{\Delta x}{2}, \quad \forall j, \nu \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

de donde, junto con (5), podremos deducir la discretización para el término integral a la derecha de (4), pues

$$\int_{\mathbb{R}} k(x_j - s)u(s, t^n) ds = \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} u(x_{\nu+j}, t^n) w_\nu + \mathcal{O}(\Delta x), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0, \quad (6)$$

con

$$(w_\nu) := \left( \int_{I_\nu} k(\xi) d\xi \right), \quad \text{para } \nu = -\eta, \dots, \eta. \quad (7)$$

Note que las propiedades del núcleo  $k$  aseguran que son ciertas

$$w_\nu > 0, \quad \forall \nu = 0, \pm 1, \dots, \pm \eta, \quad (8)$$

$$\sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu = 1. \quad (9)$$

Por otro lado, para discretizar los términos con derivadas parciales de  $u$  que figuran en (4), denotamos  $u_{j_0}^{n_0} := u(x_{j_0}, t^{n_0})$ ,  $j_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , y usamos las diferencias finitas centradas

$$u_t(x_j, t^n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (10)$$

$$u_{xx}(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (11)$$

$$u_x(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (12)$$

para  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Habiendo obtenido aproximaciones numéricas para cada término en (4), hemos encontrado que una solución  $u$  a (1) cumple que

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= b \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - ru_j^n + d \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu u_{j+\nu}^n - du_j^n + \\ &+ \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta t), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

por lo que podemos definir nuestra aproximación del valor  $u_j^n$  como  $v_j^n$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} &= b \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} + c \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} - \\ &- rv_j^n + d \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu v_{j+\nu}^n - dv_j^n, \quad j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (13)$$

lo cual, haciendo  $\mu := \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  y  $\lambda := \frac{\Delta t}{\Delta x}$ , equivale a

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= \left( b\mu + c\frac{\lambda}{2} \right) v_{j+1}^n + (1 - r\Delta t - d\Delta t - 2b\mu)v_j^n + \\ &+ \left( b\mu - c\frac{\lambda}{2} \right) v_{j-1}^n + \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} d\Delta t w_\nu v_{j+\nu}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Finalmente, recurriendo a (7) podemos reescribir nuestro esquema numérico como

$$v_j^n = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u_0(x) dx, & n = 0, \\ \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu v_{j+\nu}^{n-1}, & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (14)$$

con

$$\tilde{w}_\nu := \begin{cases} d\Delta t w_\nu, & \nu = \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \eta, \\ d\Delta t w_{-1} + \left(b\mu - c\frac{\lambda}{2}\right), & \nu = -1, \\ d\Delta t w_0 + (1 - r\Delta t - d\Delta t - 2b\mu), & \nu = 0, \\ d\Delta t w_1 + \left(b\mu + c\frac{\lambda}{2}\right), & \nu = 1. \end{cases} \quad (15)$$

### 3. Estabilidad y monotonía

A continuación realizaremos el análisis de estabilidad y monotonía del esquema (14) bajo las condiciones

$$b, d > 0, \quad c \geq 0, \quad r = 0, \quad (16)$$

$$d\Delta t + 2b\mu < 1, \quad \frac{c}{2b} < \frac{1}{\Delta x} \quad \text{y} \quad \frac{b^2}{\Delta x^2} \geq 1, \quad (17)$$

con las cuales, junto con (8) y (9), aseguramos que se cumplan

$$\tilde{w}_\nu > 0, \quad \nu = 0, \pm 1, \dots, \pm \eta, \quad (18)$$

$$\sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu = 1. \quad (19)$$

De (13), es cierto que

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n + b\mu(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + c\frac{\lambda}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \\ &+ d\Delta t \left( \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu v_{j+\nu}^n - v_j^n \right), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Si representamos  $v_j^n$  por  $z_n \exp(sx_j i)$  con  $i = \sqrt{-1}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , y lo sustituimos en (20), obtenemos que

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= \left\{ 1 + b\mu [\exp(s\Delta x i) - 2 + \exp(-s\Delta x i)] + c\frac{\lambda}{2} [\exp(s\Delta x i) - \exp(-s\Delta x i)] + \right. \\ &\quad \left. + d\Delta t \left[ \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu \exp(s\Delta x \nu i) - 1 \right] \right\} z_n \exp(sx_j i) \\ &= \left\{ 1 + 2b\mu [\cos(s\Delta x) - 1] + ic\lambda \sin(s\Delta x) + d\Delta t \left[ \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu \exp(s\Delta x \nu i) - 1 \right] \right\} v_j^n \\ &= \left\{ 1 - 4b\mu \sin^2\left(\frac{s\Delta x}{2}\right) + ic\lambda \sin(s\Delta x) + d\Delta t \left[ \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu \exp(s\Delta x \nu i) - 1 \right] \right\} v_j^n, \end{aligned}$$

para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ahora, en virtud de la simetría del núcleo  $k$ , es cierto que  $w_\nu = w_{-\nu}$  para  $\nu = 1, \dots, \eta$ , con lo cual deducimos que

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= \left\{ 1 - 4b\mu \sin^2\left(\frac{s\Delta x}{2}\right) + i\lambda \sin(s\Delta x) + d\Delta t \left[ 2 \sum_{\nu=1}^{\eta} w_\nu \cos(s\Delta x\nu) + w_0 - 1 \right] \right\} v_j^n \\ &= \left\{ 1 + d\Delta t \left[ 2 \sum_{\nu=1}^{\eta} w_\nu \cos(s\Delta x\nu) + w_0 - 1 \right] - 4b\mu \sin^2\left(\frac{s\Delta x}{2}\right) + ic\lambda \sin(s\Delta x) \right\} v_j^n, \end{aligned}$$

para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . De esta manera, definiendo la función

$$g(s, \Delta x, \Delta t, b, c, d) := 1 + d\Delta t K - 4b\mu \sin^2\left(\frac{s\Delta x}{2}\right) + ic\lambda \sin(s\Delta x),$$

donde

$$K = 2 \sum_{\nu=1}^{\eta} w_\nu \cos(s\Delta x\nu) + w_0 - 1 = \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu \cos(s\Delta x\nu) - 1,$$

podemos demostrar como en [8] que el esquema numérico planteado es estable si

$$|g(s\Delta x, \Delta t, b, c, d)| \leq 1,$$

es decir, si

$$|g|^2 = \left[ 1 + d\Delta t K - 4b\mu \sin^2\left(\frac{s\Delta x}{2}\right) \right]^2 + c^2 \lambda^2 \sin^2(s\Delta x) \leq 1.$$

Ahora, de (9), y usando la desigualdad triangular, tenemos que  $-2 \leq K \leq 0$ , y además es cierto que  $\sin^2(s\Delta x) \leq 1$ . Con todo esto, la siguiente condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) es suficiente para asegurar que nuestro esquema numérico sea estable:

$$\Delta t < \frac{4d\Delta x^4}{4d^2\Delta x^4 + (16bd + c^2)\Delta x^2 + 16b^2}. \quad (21)$$

Nótese que si (17) y esta condición se satisfacen, entonces

$$\mu \leq 4\Delta t d^2 + \mu(16bd + c^2) + \mu \left( \frac{b^2}{\Delta x^2} \right) < 4d. \quad (22)$$

Procedemos en este momento a probar la propiedad de variación total decreciente (TVD) de la discretización efectuada, siguiendo el argumento presentado en el Lema 3 en [1]. Recordamos que la variación total de una función discreta  $z$  se define como

$$TV(z) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} |z_{j+1} - z_j|.$$

**Lema 3.1.** *El esquema (14) cumple la propiedad TVD bajo la condición CFL (21), esto es,*

$$TV(v^{n+1}) \leq TV(v^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

*Demostración.* Sea  $n \in \mathbb{N}_0$ . Por definición de nuestro esquema (14), y en virtud de (18), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu (v_{j+\nu+1}^n - v_{j+\nu}^n) \right| \\
 &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu |v_{j+\nu+1}^n - v_{j+\nu}^n| \\
 &= \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+\nu+1}^n - v_{j+\nu}^n| \\
 &= \left( \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu \right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^n - v_j^n| \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^n - v_j^n|.
 \end{aligned}$$

Así, hemos concluido la demostración.  $\square$

**Lema 3.2.** *El esquema (14) bajo la condición CFL (21) cumple que*

$$\|v^{n+1}\|_1 \leq \|v^n\|_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

en donde  $\|\cdot\|_1$  denota la norma en el espacio de sucesiones  $\ell_1$ .

*Demostración.* Sea  $n \in \mathbb{N}_0$ . Por definición de nuestro esquema (14), y en virtud de (18) y (9), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1}| &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu v_{j+\nu}^n \right| \\
 &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu |v_{j+\nu}^n| \\
 &= \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+\nu}^n| \\
 &= \left( \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu \right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^n| \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^n|,
 \end{aligned}$$

que es justo lo que nos proponíamos probar.  $\square$

**Lema 3.3.** *El esquema (14) bajo la condición CFL (21) cumple que*

$$\|v^{n+1}\|_\infty \leq \|v^n\|_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

en donde  $\|\cdot\|_\infty$  denota la norma en el espacio de sucesiones  $\ell_\infty$ .

*Demostración:* Sean  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $j \in \mathbb{Z}$ . Por definición de nuestro esquema (14), y en virtud de (18) y (19), tenemos que

$$|v_j^{n+1}| = \left| \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu v_{j+\nu}^n \right| \leq \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu |v_{j+\nu}^n| \leq \left( \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu \right) \|v_j^n\|_\infty = \|v_j^n\|_\infty.$$

De esta manera, podemos concluir lo deseado tomando el supremo sobre todos los  $j \in \mathbb{Z}$  a la izquierda de la desigualdad obtenida.  $\square$

A continuación, demostraremos que el esquema (14) puede cumplir la ley conservativa, siguiendo el razonamiento en [2].

**Lema 3.4.** *Si  $c = 0$ , la discretización (14) se puede reescribir en la forma conservativa*

$$v_j^{n+1} = v_j^n + (\varphi_{j+1,n} - \varphi_{j,n}), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

con

$$\varphi_{j+1,n} := \sum_{\nu=1}^{\eta} \tilde{w}_\nu \sum_{k=1}^{\nu} (v_{j+k}^n - v_{j-k+1}^n), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

En particular, si  $v_{j_0+\nu}^{n_0}$  toma el mismo valor para  $\nu = 0, \pm 1, \dots, \pm \eta$ , entonces

$$\varphi_{j_0+1,n_0} = \varphi_{j_0,n_0} = 0.$$

*Demostración:* Sean  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $j \in \mathbb{Z}$ . Al ser  $c$  nula,  $\tilde{w}_\nu = \tilde{w}_{-\nu}$  para todo  $\nu = \pm 1, \dots, \pm \eta$ , pues los pesos  $w_\nu$  ya eran simétricos por la simetría del núcleo  $k$  con respecto al eje  $Y$ . De esta manera, por definición de nuestro esquema (14), y en virtud de (18) y (19), tenemos que

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} - v_j^n &= \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu v_{j+\nu}^n - v_j^n \\ &= \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu v_{j+\nu}^n - \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu v_j^n \\ &= \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu (v_{j+\nu}^n - v_j^n) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\eta} \tilde{w}_\nu (v_{j+\nu}^n - v_j^n) + \sum_{\nu=-\eta}^{-1} \tilde{w}_\nu (v_{j+\nu}^n - v_j^n) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\eta} \tilde{w}_\nu (v_{j+\nu}^n - v_j^n) + \sum_{\nu=1}^{\eta} \tilde{w}_\nu (v_{j-\nu}^n - v_j^n) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\eta} \tilde{w}_\nu \sum_{k=1}^{\nu} (v_{j+k}^n - v_{j-k+1}^n) - \sum_{\nu=1}^{\eta} \tilde{w}_\nu \sum_{\nu=1}^{\nu} (v_{j+k-1}^n - v_{j-k}^n) \\ &= \varphi_{j+1,n} - \varphi_{j,n}. \end{aligned} \quad \square$$



**Lema 3.5.** *El esquema (14) bajo la condición CFL (21) cumple que*

$$\Delta x \|v^{n+1} - v^n\|_1 \leq \Delta t C_1 + C_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

donde  $\|\cdot\|_1$  denota la norma en el espacio de sucesiones  $\ell_1$ , y las constantes  $C_1$  y  $C_2$  son independientes de  $\Delta x$  y  $\Delta t$ .

*Demostración.* Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $j \in \mathbb{Z}$ . Por definición de nuestro esquema (14), tenemos que

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_i v_{j+\nu}^n - \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu v_{j+\nu}^{n-1} = \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu (v_{j+\nu}^n - v_{j+\nu}^{n-1}),$$

de donde, en virtud de (18) y (19),

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1} - v_j^n| &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu |v_{j+\nu}^n - v_{j+\nu}^{n-1}| \\ &= \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{w}_\nu |v_{j+\nu}^n - v_{j+\nu}^{n-1}| \\ &= \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+\nu}^n - v_{j+\nu}^{n-1}| \\ &= \left( \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu \right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^n - v_j^{n-1}| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^n - v_j^{n-1}|. \end{aligned}$$

De esta manera, llevando a cabo un proceso inductivo podemos concluir que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1} - v_j^n| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^1 - v_j^0|, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (23)$$

Ahora, de (13),

$$\begin{aligned} v_j^1 - v_j^0 &= \Delta t \left( b \frac{v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0}{\Delta x^2} + c \frac{v_{j+1}^0 - v_{j-1}^0}{2\Delta x} \right)_j + d \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu v_{j+\nu}^0 - d v_j^0 \\ &= \left( b\mu + c \frac{\lambda}{2} \right) v_{j+1}^0 + \left( b\mu - c \frac{\lambda}{2} \right) v_{j-1}^0 + d\Delta t \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu v_{j+\nu}^0 - (2b\mu + d\Delta t) v_j^0; \end{aligned}$$

así, de (8), (9), (16) y (17),

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^1 - v_j^0| &\leq \left( b\mu + c \frac{\lambda}{2} \right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^0| + \left( b\mu - c \frac{\lambda}{2} \right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^0| + d\Delta t \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^0| + \\ &\quad + (2b\mu + d\Delta t) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^0|, \\ &= 4b\mu \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^0| + 2d\Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^0|, \end{aligned}$$

que junto con (22) y (23) implica que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1} - v_j^n| \leq 16bd \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^0| + 2d\Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^0|, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (24)$$

Finalmente, a partir de (3) y (24) concluimos que

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1} - v_j^n| &\leq 16bd\Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^0| + 2d\Delta t\Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^0| \\ &= 16bd \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{I_j} u_0(x) dx \right| + 2d\Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{I_j} u_0(x) dx \right| \\ &\leq 16bd \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{I_j} |u_0(x)| dx + 2d\Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{I_j} |u_0(x)| dx \\ &= 16bd \|u_0\|_1 + 2d\Delta t \|u_0\|_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (25)$$

en donde  $\|\cdot\|_1$  denota la norma del espacio de funciones  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Hemos llegado a la conclusión tomando como constantes

$$C_1 := 2d\|u_0\|_1 \quad \text{y} \quad C_2 := 16bd\|u_0\|_1. \quad \checkmark$$

**Lema 3.6.** *Sea  $\Delta t < 1$ . El esquema (14) bajo la condición CFL (21) cumple que*

$$|v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| \leq f(\Delta x), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

con  $f$  una función tal que  $f(\Delta x) \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Sean  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $j \in \mathbb{Z}$ . De (15), (16) y (17),  $\tilde{w}_\nu < dw_\nu + 1$ , para  $\nu = 0, \pm 1$ , y además  $\tilde{w}_\nu < dw_\nu$  para  $\nu = \pm 2, \dots, \pm \eta$ , por ser  $\Delta t < 1$ . Entonces, por definición de nuestro esquema (14) y en virtud de (18),

$$\begin{aligned} |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| &= \left| \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu v_{j+1+\nu}^n - \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu v_{j+\nu}^n \right| \\ &= \left| \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu (v_{j+1+\nu}^n - v_{j+\nu}^n) \right| \\ &\leq \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_\nu |v_{j+1+\nu}^n - v_{j+\nu}^n| \\ &< d \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} w_\nu |v_{j+1+\nu}^n - v_{j+\nu}^n| + 3 |v_{j+1}^n - v_j^n|. \end{aligned}$$

Ahora, dado que  $w_\nu < w_0$  para todo  $\nu = \pm 1, \dots, \pm \eta$ , por ser  $k$  decreciente en  $[0, \infty)$  y simétrica con respecto al eje  $Y$ ,

$$|v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| < dw_0 \sum_{\nu=-\eta}^{\eta} |v_{j+1+\nu}^n - v_{j+\nu}^n| + 3 |v_{j+1}^n - v_j^n|;$$

luego, por el Lema 3.1,

$$|v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| < dw_0 TV(v_0) + 3 |v_{j+1}^n - v_j^n|,$$

de donde obtenemos, siguiendo un proceso inductivo,

$$|v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| < dw_0 n TV(v_0) + 3 |v_{j+1}^0 - v_j^0|.$$

De esta manera, usando la definición de  $v_j^0$ , y gracias al hecho de que  $u_0$  es lipschitziana,

$$\begin{aligned} |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| &< dw_0 n TV(v_0) + 3 \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{I_{j+1}} u_0(x) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u_0(x) dx \right| \\ &= dw_0 n TV(v_0) + 3 \frac{1}{\Delta x} \left| \int_{I_j} u_0(x + \Delta x) dx - \int_{I_j} u_0(x) dx \right| \\ &= dw_0 n TV(v_0) + 3 \frac{1}{\Delta x} \left| \int_{I_j} [u_0(x + \Delta x) - u_0(x)] dx \right| \\ &\leq dw_0 n TV(v_0) + 3 \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} |u_0(x + \Delta x) - u_0(x)| dx \\ &\leq dw_0 n TV(v_0) + 3 \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} L \Delta x dx \\ &= dw_0 n TV(v_0) + 3L \Delta x. \end{aligned}$$

Con todo esto logramos la conclusión de la prueba, pues  $w_0 = \int_{-\frac{1}{2}\Delta x}^{\frac{1}{2}\Delta x} k(-\xi) d\xi \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , y claramente  $L \Delta x \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .  $\square$

#### 4. Experimentos numéricos

La solución exacta de (1) está dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix\xi) \exp(\hat{q}(\xi)t) \hat{u}_0(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty), \quad (26)$$

donde

$$\hat{q}(\xi) = \sqrt{2\pi} \left( \frac{-r}{\sqrt{2\pi}} + d(\hat{k}(\xi) - \hat{k}(0)) - \frac{b\xi^2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{ic\xi}{\sqrt{2\pi}} \right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

En los ejemplos de esta sección usamos la función *quadgk* de Matlab para calcular la integral impropia en (26). En cuanto a nuestro esquema numérico (14), discretizamos el dato inicial  $u_0$ , y nos es especialmente útil usar la siguiente representación matricial para las iteraciones subsiguientes:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{T}_l \mathbf{v}^n_l + \mathbf{T} \mathbf{v}^n + \mathbf{T}_r \mathbf{v}^n_r, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \quad (27)$$

en donde

$$\mathbf{T}_l = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{-\eta} & \cdots & \tilde{w}_{-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \tilde{w}_{-\eta} \\ 0 & & & \end{bmatrix}_{m \times \eta}, \quad \mathbf{v}^n_l = \begin{bmatrix} v_{-\eta+1}^n \\ v_{-\eta+2}^n \\ \vdots \\ v_{-1}^n \\ v_0^n \end{bmatrix}_{\eta \times 1},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_0 & \cdots & \tilde{w}_\eta & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \tilde{w}_{-\eta} & & \ddots & \tilde{w}_\eta \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \tilde{w}_{-\eta} & \cdots & \tilde{w}_0 \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \mathbf{v}^n = \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ v_{m-1}^n \\ v_m^n \end{bmatrix}_{m \times 1},$$

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} & & 0 \\ \tilde{w}_{-\eta} & & \\ \vdots & \ddots & \\ \tilde{w}_1 & \cdots & \tilde{w}_\eta \end{bmatrix}_{m \times \eta}, \quad \mathbf{v}^n_r = \begin{bmatrix} v_{m+1}^n \\ v_{m+2}^n \\ \vdots \\ v_{m+\eta-1}^n \\ v_{m+\eta}^n \end{bmatrix}_{\eta \times 1}.$$

Esta representación es posible de obtener gracias a las propiedades de los pesos  $\tilde{w}_\nu$ ,  $\nu = 0, \pm 1, \dots, \pm \eta$  consignadas en (18) y (19), las cuales se satisfacen bajo las condiciones (16) y (17). En el primer ejemplo de aproximación tomamos  $r = 0$  y condición inicial la función periódica  $u_0(x) = \cos(\frac{\pi}{3}x)$ , obteniendo el orden de convergencia y el error para diferentes normas. En el ejemplo 4.2 tomamos  $r = 1$  y condiciones iniciales discontinuas, y podemos observar que, aunque ni los parámetros ni las condiciones iniciales son idóneas, el error y el orden de la aproximación convergen a la función exacta.

**Ejemplo 4.1.** Sean  $c = 4, b = d = 1, r = 0$  y  $u_0(x) = \cos(\frac{\pi}{3}x)$  la condición inicial. Considere los dos núcleos  $k_1(x) = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \exp(-100x^2)$  y  $k_2(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$ , [7]. A continuación mostramos las gráficas de las soluciones exactas al problema de interés con los parámetros indicados, junto con las gráficas de las aproximaciones numéricas obtenidas por medio del esquema numérico planteado, y las tablas de errores correspondientes. Los errores fueron calculados usando como solución de referencia la obtenida con *quadgk* para (26).

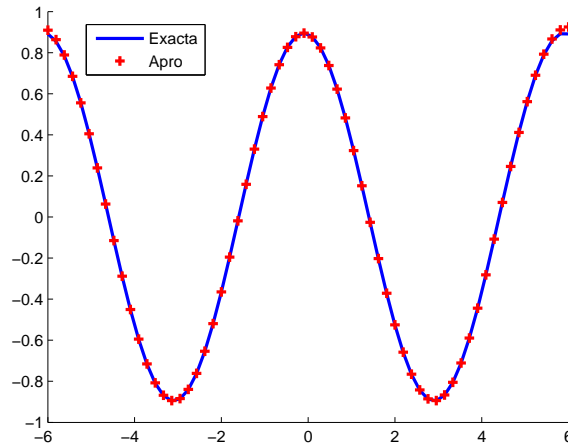


Figura 1. Ejemplo 4.1 tomando  $k_1, p = 6, \Delta x = 2p/64$  y en el tiempo  $T = 0,1$ .

N	error $L_1$	orden $L_1$	error $L_2$	orden $L_2$	error $L_\infty$	orden $L_\infty$
32	1,11E-02	-	1,83E-02	-	5,99E-02	-
64	5,15E-03	1,1	1,03E-02	0,82	4,14E-02	0,53
128	2,44E-03	1,08	5,35E-03	0,94	2,36E-02	0,81
256	1,21E-03	1,01	2,69E-03	0,98	1,24E-02	0,92

Cuadro 1. Ejemplo 4.1 tomando  $k_1, p = 6, \Delta x = 2p/(N - 1)$  y en el tiempo  $T = 0,1$ .

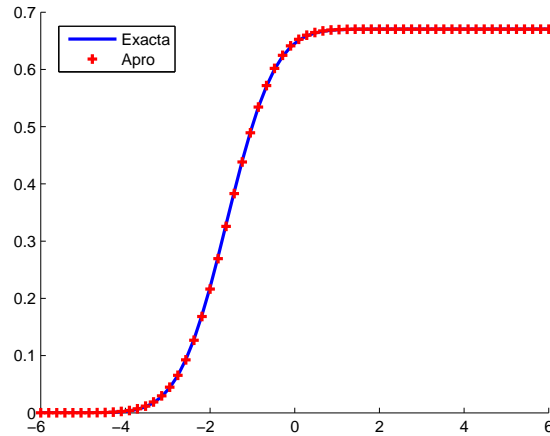
N	error $L_1$	orden $L_1$	error $L_2$	orden $L_2$	error $L_\infty$	orden $L_\infty$
32	8,86E-03	-	1,54E-02	-	5,29E-02	-
64	3,84E-03	1,20	8,83E-03	0,80	3,76E-02	0,49
128	1,71E-03	1,16	4,59E-03	0,94	2,17E-02	0,79
256	8,00E-04	1,09	2,34E-03	0,97	1,16E-02	0,90

Cuadro 2. Ejemplo 4.1 tomando  $k_2, p = 6, \Delta x = 2p/(N - 1)$  y en el tiempo  $T = 0,1$ .

**Ejemplo 4.2.** Sean  $c = 4, b = r = d = 1$ , y  $k(x) = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \exp(-100x^2)$ . Considérense las dos condiciones iniciales  $u_1(x) = \mathcal{H}(x)$ , la función de Heaviside, y

$$u_2(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

A continuación mostramos las gráficas de las soluciones exactas al problema de interés con los parámetros indicados, junto con las gráficas de las aproximaciones numéricas obtenidas por medio del esquema numérico planteado, y las tablas de errores correspondientes.



**Figura 2.** Ejemplo 4.2 con condición inicial  $u_1, p = 6, \Delta x = 2p/63$  y en el tiempo  $T = 0,4$ .

N	$L_1$ error	$L_1$ orden	$L_2$ error	$L_2$ orden	$L_\infty$ error	$L_\infty$ orden
32	6,00E-03	-	8,42E-03	-	1,90E-02	-
64	1,53E-03	1,97	2,17E-03	1,96	5,24E-03	1,86
128	3,84E-04	1,99	5,52E-04	1,97	1,35E-03	1,95
256	9,62E-05	2,00	1,39E-04	1,99	3,40E-04	1,99

**Cuadro 3.** Ejemplo 4.2 con condición inicial  $u_1, p = 6, \Delta x = 2p/(N - 1)$  y en el tiempo  $T = 0,4$ .

N	$L_1$ error	$L_1$ orden	$L_2$ error	$L_2$ orden	$L_\infty$ error	$L_\infty$ orden
32	3,78E-02	-	3,27E-02	-	3,20E-02	-
64	1,07E-02	1,82	9,41E-03	1,80	9,58E-03	1,74
128	2,76E-03	1,95	2,45E-03	1,94	2,56E-03	1,90
256	6,96E-04	1,99	6,15E-04	1,99	6,35E-04	2,01

**Cuadro 4.** Ejemplo 4.2 con condición inicial  $u_2, p = 6, \Delta x = 2p/(N - 1)$  y en el tiempo  $T = 0,4$ .

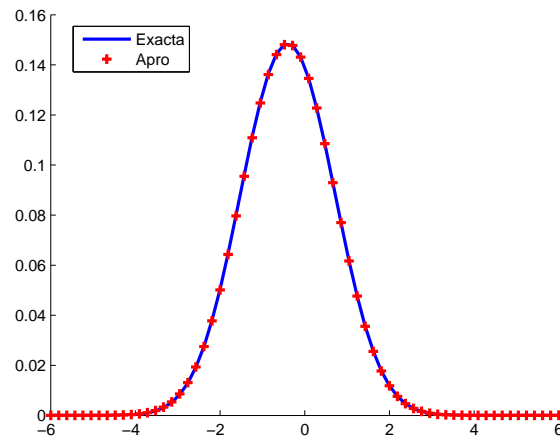


Figura 3. Ejemplo 4.2 con condición inicial  $u_2$ ,  $p = 6$ ,  $\Delta x = 2p/63$  y en el tiempo  $T = 0,4$ .

## 5. Conclusiones

La aplicación de las matrices de condición de borde en la aproximación del problema (1) es muy favorable para efectos de programación en Matlab. El uso de la molificación discreta también puede ser ventajoso por las cualidades que presenta en el empleo de problemas inversos y en la aceleración de los algoritmos para varios esquemas numéricos por diferencias finitas.

Bajo condiciones razonables, se lograron demostrar propiedades importantes sobre el esquema numérico planteado, como lo son la propiedad TVD, la ley conservativa y los lemas de regularidad. Estas propiedades son indispensables para lograr buena convergencia a la solución exacta, pero no necesariamente son suficientes. Encontrar condiciones suficientes sería parte de trabajos futuros.

Aunque la condición de estabilidad obtenida es muy restrictiva y los errores y órdenes en los experimentos numéricos realizados son buenos para  $r = 0$  y  $r = 1$ , hay que tener en cuenta que el algoritmo del esquema numérico con  $r = 1$  converge, así no se cumplan las propiedades de estabilidad y la monotonía probadas. Para cuando las condiciones iniciales no son continuas, observamos que el orden de error se encontraba alrededor de dos, mientras que para las condiciones iniciales periódicas se obtuvo un orden aproximado de uno. Hallamos una posible razón de ser de este último como consecuencia de la gran cantidad de máximos y mínimos que tiene la condición inicial en el intervalo de aproximación.

Notamos que, si bien se puede tener la solución exacta de (1) por la transformada de Fourier, el cálculo analítico de las integrales impropias no es posible para todas las funciones. Más aún, pudimos observar en nuestros experimentos que las aproximaciones obtenidas por medio de integración numérica no siempre convergen.

Para trabajos futuros se podría aplicar nuestro algoritmo en condiciones reales de la bolsa de valores, verificando su precisión y predicción, y se podría desarrollar la discretización

de esta ecuación en su forma no lineal. Se espera que la propiedad TVD y los lemas de regularidad se cumplan bajo condiciones similares.

## Referencias

- [1] Acosta C.D. and Mejía C.E., “A mollification based operator splitting method for convection diffusion equations”, *Comput. Math. Appl.* 59 (2010), No. 4, 1397–1408.
- [2] Acosta C.D. and Mejía C.E., “Approximate solution of hyperbolic conservation laws by discrete mollification”, *Appl. Numer. Math.* 59 (2009), No. 9, 2256–2265.
- [3] Acosta C.D. and Mejía C.E., “Stabilization of explicit methods for convection diffusion equations by discrete mollification”, *Comput. Math. Appl.* 55 (2008), No. 3, 368–380.
- [4] Acosta C.D, Büger R. and Mejía C.E., “Monotone difference schemes stabilized by discrete mollification for strongly degenerate parabolic equations”, *Numer. Methods Partial Differential Equations.* 28 (2012), No. 1, 38–62.
- [5] Andreu-Vaillo F., Mazón J.M., Rossi J.D. and Toledo-Melero J.J., *Nonlocal diffusion problems*, Mathematical Surveys and Monographs, 165, 2010.
- [6] Bogoya M. and Gómez C.A., “Modelo discreto para una ecuación de difusión no local”, *Rev. Colombiana Mat.* 47 (2013), No. 1, 83–94.
- [7] Bhowmik S.K., “Fast and efficient numerical methods for an extended Black-Scholes model”, *Comput. Math. Appl.* 67 (2014), No. 3, 636–654.
- [8] Bhowmik S.K., “Stability and convergence analysis of a one step approximation of a Linear partial integro-differential equation”, *Numer. Methods Partial Differential Equations.* 27 (2011), No. 5, 1179–1200.
- [9] Pérez-Llanos M. and Rossi J.D., “Numerical approximations for a nonlocal evolution equation”, *SIAM J. Numer. Anal.* 49 (2011), No. 5, 2103–2123.